

①

$$2x^2 = 4x$$

$$2 \cdot (2)$$



$$f(x) = \ln(3x+1) - x^2$$

a) DERIVACE

$$f'(x) = \frac{1}{3x+1} \cdot 3 - 2x = \frac{3}{3x+1} - 2x = 3 \cdot (3x+1)^{-1} - 2x$$

$$\text{TEČNA: } y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$x_0 = 0$

$$f(0) = \ln(1) - 0 = 0$$

$$f'(0) = \frac{3}{3 \cdot 0 + 1} - 2 \cdot 0 = 3$$

$$f''(x) = 3 \cdot (-1) \cdot (3x+1)^{-2} \cdot 3 - 2 = -9 \cdot \frac{1}{(3x+1)^2} - 2 = -\frac{9}{(3x+1)^2} - 2$$

$$T: y = 0 + 3 \cdot (x - 0) = 3x$$

$$f''(0) = -\frac{9}{1} - 2 = -11$$

b) TAYLORŮV POLYNOM

$T_2(x)$ stupně 2 o středu $x_0 = 0$

Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = \frac{1}{3}$,

~~odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu~~

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

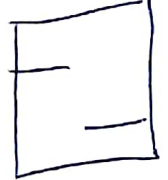
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 \dots$$

1. stupeň 2. st.

$$T_2(x) = 0 + \frac{3}{1} \cdot (x - 0)^1 + \frac{-11}{2} \cdot (x - 0)^2 = 3x - \frac{11}{2}x^2$$

$$\text{Pro } x = \frac{1}{3}: 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{9} = 1 - \frac{11}{18} = \frac{18}{18} - \frac{11}{18} = \frac{7}{18}$$

c) Vypočítej 3. derivaci



• Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$.

• Pomocí $R_3(\frac{1}{3})$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(\frac{1}{3})$ z úlohy b

$$f''(x) = -\frac{9}{(3x+1)^2} - 2 = \boxed{-9 \cdot (3x+1)^{-2} - 2}$$

$$x_0 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{3}$$

$$f'''(x) = -9 \cdot (-2) \cdot (3x+1)^{-3} \cdot 3 = 54 \cdot (3x+1)^{-3} = \frac{54}{(3x+1)^3}$$

Zbytek: $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$ $n=2$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$R_3(x) = \left(\frac{\frac{54}{(3\xi+1)^3}}{3!} \cdot (x-0)^3 \right) = \frac{54}{6 \cdot (3\xi+1)^3} \cdot x^3 =$$

$$= \frac{9}{(3\xi+1)^3} \cdot x^3$$

ξ leží mezi x_0 a x

$$\xi \in [0, \frac{1}{3}]$$

$$R_3(\frac{1}{3}) = \frac{9}{(3\xi+1)^3} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{(3\xi+1)^3}$$

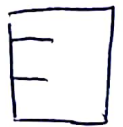
$$x_0 = \xi \quad f(\frac{1}{3}) = x$$

$$R_3(\frac{1}{3}) = \frac{9}{(3 \cdot 0 + 1)^3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{9}{1} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Napiš } |R_3(\frac{1}{3})| \leq \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} &\text{že zjednáme} \\ &X_0 = 0 \\ &f = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2$$



$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{x+1} - x = (x+1)^{-1} - x$$

$$T: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$x_0 = 0$$

$$f(0) = 0 - 0 = 0$$

$$y = 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$

$$f'(0) = 1 - 0 = 1$$

$$\textcircled{2} T_2(x), x_0 = 0, \text{ približná hodnota pro } f(x) \text{ } x = \frac{1}{3}$$

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2$$

$$T_2\left(\frac{1}{3}\right) = 0 + \frac{1}{1} \cdot x + \frac{-2}{2} \cdot x^2 = \underline{\underline{x - x^2}}$$

$$T_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$$

$$f''(x) = (-1) \cdot (x+1)^{-2} - 1 = -\frac{1}{(x+1)^2} - 1 = (-1) \cdot (x+1)^{-2} - 1$$

$$f''(0) = -1 - 1 = \underline{\underline{-2}}$$

$$\textcircled{3} f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$R_3\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

$$R_3(x) = \frac{\frac{2}{(\xi+1)^3}}{\frac{3!}{1}} \cdot (x)^3 = \frac{2}{6 \cdot (\xi+1)^3} \cdot x^3 = \frac{1}{3 \cdot (\xi+1)^3} \cdot (x^3)$$

$$\xi \text{ leží mezi } x_0 \text{ a } x, \quad |R_3\left(\frac{1}{3}\right)| \leq \frac{1}{81}$$

$\downarrow$
 0

$\downarrow$
 $\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{27}} = \frac{1}{81}$$

1(a) $f(x) = (x-6) \cdot \sqrt{x}$ | $x_0 = 4$
 $= (x-6) \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$D(f) = x \geq 0 \Rightarrow x \in \langle 0; \infty \rangle \quad x \in \mathbb{R}$

T: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

~~$f'(x) = -6 \cdot x^{\frac{1}{2}} + (x-6) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$
 $= -6\sqrt{x} + \frac{x-6}{2\sqrt{x}} = \frac{-12x + x - 6}{2\sqrt{x}} = \frac{-11x - 6}{2\sqrt{x}}$~~

$f'(x) = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}} + (x-6) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + \frac{x-6}{2\sqrt{x}} =$
 $= \frac{2x + x - 6}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 6}{2\sqrt{x}}$

$f(4) = (4-6) \cdot \sqrt{4} = -2 \cdot 2 = -4$

$f'(4) = \frac{3 \cdot 4 - 6}{2\sqrt{4}} = \frac{12 - 6}{4} = \frac{3}{2}$

$y = -4 + \frac{3}{2} \cdot (x - 4) = -4 + \frac{3}{2}x - 6 = \underline{\underline{-10 + \frac{3}{2}x}}$

Napiš funkcií hodnotu pro $x = \frac{9}{2}$

$y = -10 + \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2} = -10 + \frac{27}{4} = -\frac{40}{4} + \frac{27}{4} = \underline{\underline{-\frac{13}{4}}}$

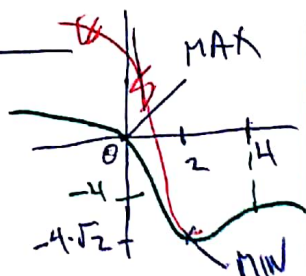
✓ Zjednodušte existenci absolutní extrémů na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$
 a absolutní extrémů vně

Zjednodušení: fce je na tomto intervalu spojitá, interval je omezený,
 a uzavřený

$\frac{3x-6}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 3x-6=0$
 $3x=6$
 $\underline{\underline{x=2}}$

	0	2	4
$3x-6$	-	+	
$2\sqrt{x}$	+	+	
	⊖	⊕	

lok. minimum



$f(2) = (2-6) \cdot \sqrt{2} = -4 \cdot \sqrt{2}$ MIN

$f(0) = -6 \cdot 0 = 0$ MAX $f(4) = (4-6) \cdot \sqrt{4} = -2 \cdot 2 = -4$

$$a) f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-1} - x = 2 \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} - x$$

5

$$D(f): x-1 \geq 0 \quad x \in \langle 1; \infty \rangle \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x \geq 1$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-1)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1$$

$$T: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad f(5) = 2 \cdot \sqrt{4} - 5 = 4 - 5 = -1$$

$$f'(5) = \frac{1}{\sqrt{5-1}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$y = -1 + \frac{1}{2} \cdot (x-5) = -1 - \frac{x}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$\frac{11}{2} \rightarrow y: y\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} = \frac{3}{2} - \frac{11}{4} = \frac{6}{4} - \frac{11}{4} = -\frac{5}{4}$$

b) Zderivujte existenci absolutních extrémů na intervalu $I = \langle 1; 6 \rangle$, uveďte absolut. extrémů $\rightarrow$ zderiv.: fce je na intervalu $\langle 1; 6 \rangle$ spojitá!

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1 \quad \sqrt{x-1} = 1 \quad x-1 = 1 \quad x = 2$$

$$f(2) = 2 \cdot \sqrt{1} - 2 = 0 \quad \text{MAX}$$

$$f(1) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(6) = 2 \cdot \sqrt{5} - 6 \approx -1,5$$

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \text{MIN}$$

	1	2	6
$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$	-1	+	-
		↗	↘
		MAX	

① Zdrobněte existenci a nalezněte absolutní extrém fce.

⑥

$$f(x) = x \cdot \sqrt{2x+3} = x \cdot (2x+3)^{\frac{1}{2}}$$

$$I = \left(-\frac{3}{2}; 1 \right)$$

$$D(f): 2x+3 \geq 0 \quad x \in \left(-\frac{3}{2}; \infty \right) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2x \geq -3$$

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot (2x+3)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \sqrt{2x+3} + \frac{x}{\sqrt{2x+3}} = \\ &= \frac{(2x+3)^{\frac{1}{2}} + x \cdot (2x+3)^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{(2x+3) + x}{\sqrt{2x+3}} = \frac{3x+3}{\sqrt{2x+3}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{3x+3}{\sqrt{2x+3}} = 0$$

$$3x+3 = 0$$

$$3x = -3$$

$$\underline{\underline{x = -1}}$$

	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	1
$3x+3$	-	-	+	+
$\sqrt{2x+3}$	+	+	+	+
		$\ominus \searrow$	$\oplus \nearrow$	

$$\frac{5}{4}: 3\left(-\frac{5}{4}\right) + 3 = -\frac{15}{4} + 3 = \ominus$$

$$\frac{5}{4}: \sqrt{2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 3} = \sqrt{-\frac{5}{2} + 3} = \oplus$$

$$0: 3 \cdot 0 + 3 = \oplus$$

$$0: \sqrt{2 \cdot 0 + 3} = \oplus$$

$$f(-1) = (-1) \cdot \sqrt{-2+3} = \underline{\underline{-1}} \text{ MIN}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{2}\right) &= \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3} = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{0} = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

$$f(1) = 1 \cdot \sqrt{5} = \underline{\underline{\sqrt{5}}} \text{ MAX}$$

fa: $f(x) = e^{3x-6} - x$

(7)

a, Tečna pro $x_0 = 2$

$$f'(x) = e^{3x-6} \cdot 3 - 1 = 3 \cdot e^{3x-6} - 1$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad f(2) = e^0 - 2 = -1$$

$$y = -1 + 2 \cdot (x - 2) =$$

$$f'(2) = 3 \cdot e^0 - 1 = 2$$

$$= -1 + 2x - 4 = \underline{\underline{2x - 5}}$$

$$f''(2) = 9 \cdot e^0 = 9$$

b, $T_2(x)$, $x_0 = 2$

Uvči přibližnou hodnotu pro $x = \frac{5}{3}$

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 =$$

$$= -1 + \frac{2}{1} \cdot (x - 2)^1 + \frac{9}{2} \cdot (x - 2)^2 =$$

$$= -1 + 2 \cdot (x - 2) + \frac{9}{2} \cdot (x - 2)^2$$

$$f''(x) = 3 \cdot e^{3x-6} \cdot 3 = 9e^{3x-6}$$

$$T_2\left(\frac{5}{3}\right) = -1 + 2 \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{6}{3}\right) + \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{6}{3}\right)^2 =$$

$$= -1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{9}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{6}{6} - \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \underline{\underline{-\frac{7}{6}}}$$

RAV

c) Lagrangeův zbytek $R_3(x)$

(8)

Pomocí $R_3(\frac{5}{3})$ odhadnout velikost chyby přibližného
výpočtu hodnoty $f(\frac{5}{3})$ z důhy b

$$f''(x) = 9e^{3x-6}$$

$$f'''(x) = 9 \cdot e^{3x-6} \cdot 3 = 27e^{3x-6}$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

$$R_3(x) = \frac{27e^{3\xi-6}}{3!} \cdot (x-2)^3 = \frac{27e^{3\xi-6}}{2 \cdot 3} \cdot (x-2)^3 =$$

$$= \frac{9e^{3\xi-6}}{2} \cdot (x-2)^3$$

~~$$R_3\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{9e^{5-6}}{2} \cdot (x-2)^3 = \frac{9}{2e} \cdot (x-2)^3$$~~

???

$$f'''(x) = 27e^{3x-6}$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow \xi = 2$$

$$f = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$f'''(\xi) = 27e^{3\xi-6}$$

$$f'''(2) = 27$$

~~$$R_3\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{3!}{1}} \cdot (x-2)^3 = \frac{5}{81} \cdot \left(\frac{5}{3}-2\right)^3 = \frac{5}{81} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{5}{81} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)$$~~

$$R_3\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{27}{3!} \cdot \left(\frac{5}{3}-2\right)^3 = \frac{27}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \underline{\underline{-\frac{1}{6}}}$$

① $f(x) = \ln(2x+1) - \frac{x}{2}$; $x_0 = 0$

9

$$f'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{2} = 2 \cdot (2x+1)^{-1} - \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 2 \cdot (-1) \cdot (2x+1)^{-2} \cdot 2 = -4 \cdot (2x+1)^{-2} = -\frac{4}{(2x+1)^2} = -4 \cdot (2x+1)^{-2}$$

$$f'''(x) = -4 \cdot (-2) \cdot (2x+1)^{-3} \cdot 2 = 16 \cdot (2x+1)^{-3}$$

T: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ $f(0) = 0$

$$y = 0 + \frac{3}{2} (x - 0) = \frac{3}{2}x$$

$$f'(0) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f''(0) = -4$$

b) Taylor $T_2(x)$, $x_0 = 0$, přibližná hodnota pro $x = \frac{1}{2}$

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 =$$

$$= 0 + \frac{3}{2} \cdot (x - 0)^1 + \frac{-4}{2} \cdot (x)^2 =$$

$$= \frac{3}{2}x - 2x^2$$

~~$$T_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$~~

$$T_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

c) $R_3(x)$, $R_3\left(\frac{1}{2}\right)$, odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f\left(\frac{1}{2}\right)$ z úlohy b

~~$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(x)}{4!} (x - x_0)^4 = \frac{16 \cdot (2x+1)^{-3}}{24} \cdot (x)^4 = \frac{2}{3} \cdot (2x+1)^{-3} \cdot x^4$$~~

~~$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} + 1)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot (1)^{-3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{24}$$~~

Uvči vlastni čísla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -13 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{10}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 \\ -13 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(-3-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \cdot (-2-\lambda)$$

$$(-3-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \cdot (-2-\lambda) + 0 + 0 = 0 + 13 \cdot (-2-\lambda) =$$

$$(-2-\lambda) \cdot [(-3-\lambda) \cdot (-1-\lambda) + 13] = (-2-\lambda) \cdot [\lambda^2 - 2\lambda + 10] = 0$$

$$\begin{aligned} & -3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 13 \\ & \lambda^2 - 2\lambda + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.) \quad & -2 - \lambda = 0 \\ & -2 = \lambda_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{-1 = i^2}$$

$$2.) \quad \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4 - 40 = -36 \Rightarrow \text{neexistuje } \lambda_{2,3} \\ \Rightarrow \text{komplexní čísla}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{i^2 \cdot 36}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm i6}{2} \quad \begin{cases} \lambda_2 = \frac{2 + i6}{2} = \frac{2 \cdot (1 + 3i)}{2} = \\ = 1 + 3i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = \frac{2 - i6}{2} = \frac{2 \cdot (1 - 3i)}{2} = \\ = 1 - 3i \end{cases}$$

$$A = \{-2, 1+3i, 1-3i\} \quad \text{10}$$

$$|4|, |1^2 + 3^2| = |1^2 - 3^2|$$

$$4 < 10 \Rightarrow$$

Spektrální poloměr je 10.

(11)

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -13 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3+2 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & -1+2 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & -2+2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

12

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 2 \\ -1 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 2 \\ -1 & 5-\lambda & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \cdot (5-\lambda) \cdot (2-\lambda) - (2-\lambda) \cdot (-5) = (3-\lambda) \cdot (5-\lambda) \cdot (2-\lambda) + 5 \cdot (2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda) \cdot [(3-\lambda) \cdot (5-\lambda) + 5] = (2-\lambda) \cdot [\lambda^2 - 8\lambda + 15 + 5] = (2-\lambda) \cdot [\lambda^2 - 8\lambda + 20]$$

$$15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 =$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 15$$

$$\lambda^2 - 4ac$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0 \quad D = 64 - 80 = -16$$

$$(2-\lambda) = 0$$

$$\underline{\underline{2 = \lambda_1}}$$

~~$$\lambda_{2,3} = \frac{8 \pm 2}{2}$$~~

$$\lambda_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{16i^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{8 + 4i}{2} = \frac{4 \cdot (4 + 2i)}{2} = 4 + 2i$$

$$\lambda_3 = \frac{8 - 4i}{2} = \frac{4 \cdot (4 - 2i)}{2} = 4 - 2i$$

vlastní vektor pro $\lambda_1 = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{vlastní vektor } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8}t \\ -\frac{5}{8}t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z = t$$

$$8y + 5t = 0$$

$$5t = -8y$$

$$t = -\frac{8}{5}y$$

$$8y = -5t$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{5}{8}t}}$$

$$x - \frac{25}{8}t + 2t = 0$$

$$x - \frac{9}{8}t = 0$$

$$x = \frac{9}{8}t$$

M1

2017-2018

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{x^2+4}{x} + 2 = (x^2+4) \cdot x^{-1} + 2 \quad x_0=4$$

$$a) \quad Df = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$$

$$T: \quad y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Přibližná hodnota pro $x = \frac{7}{2}$

$$x_0=4$$

$$f(x_0) = \frac{20}{4} + 2 = 7$$

$$f'(x_0) = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8}{4} - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot (x)^{-1} + (x^2+4) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \\ &= 2 - \frac{x^2+4}{x^2} = 2 - (x^2+4) \cdot x^{-2} \end{aligned}$$

$$T: \quad y = 7 + \frac{3}{4} \cdot (x - 4)$$

$$x = \frac{7}{2}: \quad y = 7 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{8}{2}\right) = 7 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \cancel{\frac{56}{8}} - \frac{3}{8} = \underline{\underline{\frac{53}{8}}}$$

b) Interval $I = \langle -3; -1 \rangle$ tč je na intervalu spojitá,
interval je omezený a uzavřený

$$\begin{aligned} f''(x) &= -[2x] \cdot x^{-2} + [-(x^2+4) \cdot (-2) \cdot x^{-3}] = -\frac{2}{x} + \frac{2 \cdot (x^2+4)}{x^3} = \\ &= \frac{-2x^2 + 2x^2 + 8}{x^3} = \underline{\underline{\frac{8}{x^3}}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$f'(x) = 0$$

$$2 - \frac{x^2+4}{x^2} = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{2x^2}{x^2}} - \frac{x^2+4}{x^2} = 0$$

$$\frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$|x| = \pm 2$$

	-3	-2	-1
$x^2 - 4$	+	-	
x^2	+	+	

⊕

⊖

u bodě $f(-2) = \text{MAXIMUM} = -2$
 $f(-1) = -3 = \text{MINIMUM}$
 $f(-3) = \cancel{-\frac{1}{3}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -5 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) + 5 \cdot (2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda) \cdot [(1-\lambda) \cdot (3-\lambda) + 5] =$$

$$= (2-\lambda) \cdot (3-\lambda-3\lambda+\lambda^2+5) =$$

$$= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 8)$$

$$\cancel{A_1} \quad 2-\lambda=0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

$$D = 16 - 32 = -16$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$$

$$\lambda_3 = 2 - 2i$$

$$\lambda_1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & | & 0 \\ 0 & 4 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$z = t$$

$$4y - 4z = 0$$

$$y = t$$

$$-x + 2t - 5t = 0$$

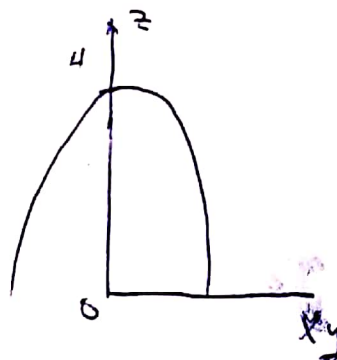
$$x = 3t$$

vektori vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} - \{0\}$

1

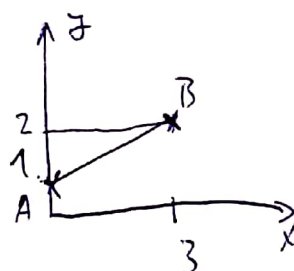
MATIKA 2

$$z = 4 - x^2 - y^2 \quad z \geq 0$$



Parametrizace úsečky:

$$X = A + (B - A) \cdot t$$



$A[0, 1]$

$B[3, 2]$

$$x = 0 + 3t$$

$$y = 1 + (2 - 1) \cdot t =$$

$$= 1 + t$$

$$t \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$P(t) = (3t; 1+t)$$

II

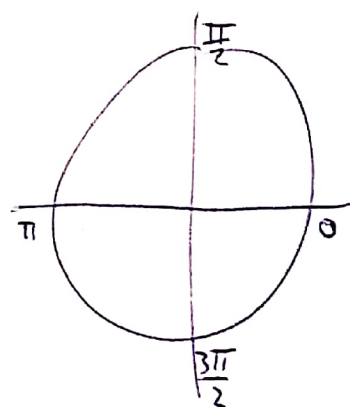
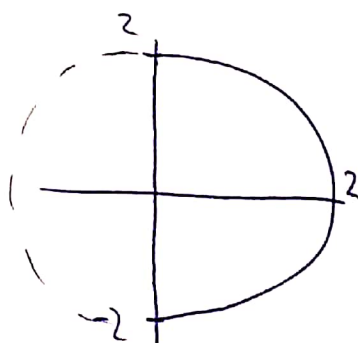
Parametrizace kružnice

$$\boxed{x^2 + y^2 = 4} \quad x \geq 0$$

$$x = 2 \cos t$$

$$y = 2 \sin t$$

$$t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

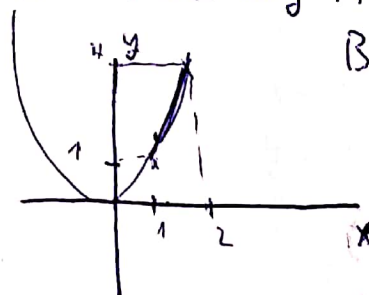


Parametrizace křivky: $C = y = x^2$ mezi body $A = [1, 1]$

$B = [2, 4]$

$$x = t \quad t \in \langle 1, 2 \rangle$$

$$y = t^2$$



(2)

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{A} + \vec{B}$$

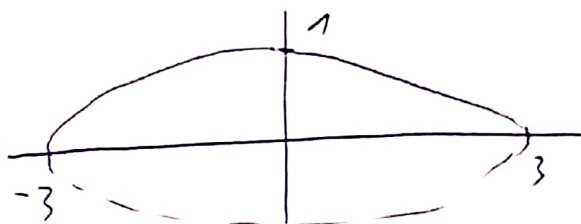
$$\cos 2t$$

$$\vec{A} + \vec{B}$$

M2

Parametrizace elipsy

$$\frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1$$



$$x = 3 \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$t \in \langle 0; \pi \rangle$$

$$\vec{P}(t) = (3 \cos t, \sin t)$$

GREENOVA VĚTA = vztah mezi křivkovým a dvojným integrálem

a) $\vec{f} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$ má spojitě derivace v oblasti $G \subset E_2$

$$\begin{cases} Q = x \\ P = -y \end{cases}$$

$$\oint_C \vec{f}(\vec{P}) d\vec{s} = \pm \iint_{\text{int} C} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\underline{\text{PF}}) \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad E_2$$

Cirkulace vektorového pole: $\vec{f} = (-y, x)$ podél křivky c , tj. $\oint_C \vec{f} d\vec{s}$

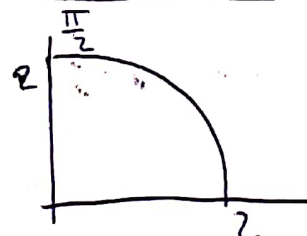
$$\text{G.V.} \quad \oint_C (-y, x) d\vec{s} = \begin{vmatrix} P = -y & P_y = -1 \\ Q = x & Q_x = 1 \end{vmatrix}$$

$$\iint (1 - (-1)) dx dy = \iint 2 dx dy =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2 \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 \cdot \left[\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{2\pi}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} dx dy &= r \cdot dr \cdot d\varphi \\ x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \\ r &= 2 \end{aligned}}$$



Krivka C v E_2

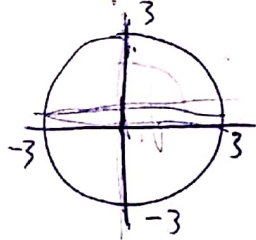
M 2.1

$$x^2 + y^2 = 9$$

a) napiš Greenovu větu

církulace vektor. pole $\vec{f} = (x - 2y, x)$

⇒ kružnice



$$G.V. \quad \oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{int}C} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \left| \begin{array}{l} P = x - 2y \quad P_y = -2 \\ Q = x \quad Q_x = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \iint_{\text{int}C} (1 - (-2)) dx dy = \boxed{\iint_{\text{int}C} 3 dx dy} \Rightarrow$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \left[\varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

~~2. způsob~~

~~1. vypočítat pol kružnice a vynásobit 2x~~

~~$$2 \cdot 3 \cdot \int_0^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx dy = 3 \cdot [x]_0^3 \cdot [y]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) =$$~~

~~$$\Rightarrow 3 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-3}^3 dx dy = 3 \cdot [x]_{-3}^3 \cdot [y]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3 \cdot (3 - (-3)) \cdot \pi = 18\pi$$~~

~~$$3 \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_{-3}^3 \cdot [y]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3 \cdot \left(\frac{9}{2} - \left(-\frac{9}{2} \right) \right) \cdot \pi = 27\pi$$~~

$$\Rightarrow 3 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-3}^3 r dr d\varphi = 3 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \pi dr = 3\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{-3}^3 = 2 \cdot 3\pi \cdot \frac{9}{2} = 27\pi$$

$$\left[\frac{r^2}{2} \right]_{-3}^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

$$\left[\frac{r^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2} \cdot 2 = 9$$

②

hruška C v E_2 : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

(M2.1)

Napsat greenovu větu $\vec{f} = (3x - y, x)$

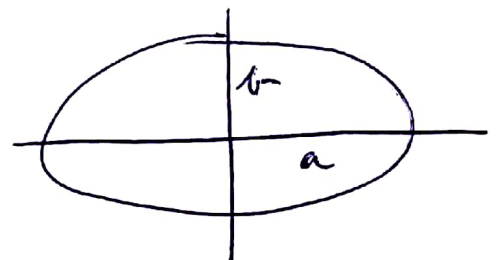
$$\oint \vec{f} d\vec{s} = \oint (3x - y, x) ds \quad \left| \begin{array}{l} P = 3x - y \\ Q = x \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} P_y = -1 \\ Q_x = 1 \end{array} \right|$$

$$\iint_{\text{int}} 1 - (-1) dx dy = \iint_{\text{int}} 2 dx dy =$$

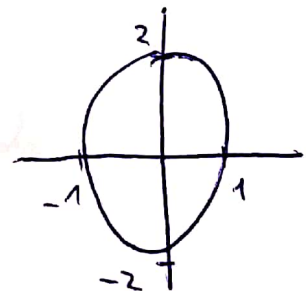
ELIPSA

~~$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r dr d\varphi \\ &= 8 \int_0^1 r \cdot 2\pi dr = \\ &= 16\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = 16\pi \cdot \frac{1}{2} = 8\pi \end{aligned}$$~~

~~$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot r \cdot \cos \varphi \\ y &= 2 \cdot r \cdot \sin \varphi \\ J &= 2r \end{aligned}$$~~



$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$



~~$$2 \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} 2 \cdot r dr d\varphi = 4 \cdot \int_{-1}^1 r [2\pi] = 8\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 8\pi \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right]$$~~

Vždy zadávám na jeden integrál jen polku mezí!

$$\iint 2 dx dy = 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2 \cdot r dr d\varphi = 4 \int_0^1 r 2\pi = 8\pi$$

③ množina M v E_2

112

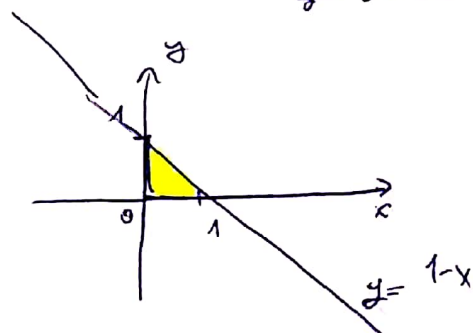
$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad y \leq 1-x$$

x	0	1
$y = 1-x$	1	0

$$\vec{f} = (2xy - y^2, x^2)$$

$$\oint (2xy - y^2, x^2) d\vec{s}$$

$$y = 1-x$$



$$\vec{f} = (2xy - y^2, x^2) \quad \left| \begin{array}{ll} P = 2xy - y^2 & P_y = 2x - 2y \\ Q = x^2 & Q_x = 2x \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \oint (2xy - y^2, x^2) d\vec{s} &\stackrel{\text{G.V.}}{=} \iint (2x - 2x + 2y) dx dy = \iint 2y dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2y dx dy = \int_0^1 \left[2 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \int_0^1 1 - 2x + x^2 dx = \\ &= \left[x - 2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Pr. $E_2: x^2 + y^2 = 9$ = kružnica $\vec{f} = (x - 2y, x)$

$$\oint (x - 2y, x) d\vec{s} = \left| \begin{array}{ll} P = x - 2y & P_y = -2 \\ Q = x & Q_x = 1 \end{array} \right|$$

$$\iint (1 - (-2)) dx dy = \iint 3 dx dy = 3 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-3}^3 dx dy =$$

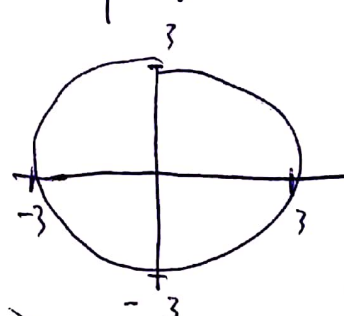
~~$$= 3 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^3 dy = 3 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right] dy = 3 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 0 dy = 0$$~~

~~$$= \frac{27}{2} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy = \frac{27}{2} \cdot \left[\frac{y}{1} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{27}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{27}{2} \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{27\pi}{2}}}$$~~

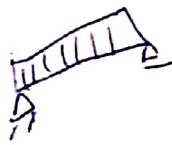
~~$$3 \cdot \left[\frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right] \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right]$$~~

~~$$= 3 \cdot \left[\frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right] \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \underline{\underline{\frac{27\pi}{2}}}$$~~

$$\oint \vec{f} d\vec{s}$$



~~$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi & x \in \langle -3; 3 \rangle \\ y &= r \cdot \sin \varphi & y \in \langle -3; 3 \rangle \\ \varphi &= \varphi & \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle \end{aligned}$$~~



Příklád skriptu 4.5 72

TRAJEKTORIE
BODŮ ROVNOVÁŽÍ
ROVNICE FÁZOVÝCH
TRAJEKTORIÍ

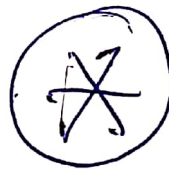
M3
①

$$\begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ \dot{x} = x^2 - y^2 & \dot{y} = -2x(y+1) \end{array}$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2(y+1) & -2x \end{pmatrix} \text{ jsou spjité v } E_2$$

Určete rovnici fázových trajektorií, kt. prochází bodem $M = [1, 0]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x(y+1)}{x^2 - y^2} \quad / \quad dx \cdot (x^2 - y^2)$$



$$dy \cdot (x^2 - y^2) = -2x \cdot (y+1) dx$$

$$\underbrace{2x \cdot (y+1) dx}_m + \underbrace{(x^2 - y^2) dy}_n = 0$$

$$\int 2x \cdot (y+1) dx = \int 2xy + 2x dx = y \cdot x^2 + x^2 + C$$

$$\int x^2 - y^2 dy = \int x^2 dy - \int y^2 dy = x^2 \cdot y - \frac{y^3}{3} + C$$

derivuj dle y
 $\frac{\partial L}{\partial y} = x^2$

derivuj dle x

Určete vci fáz. Trajektori;

M3

2



$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x(y+1)}{x^2-y^2}$$

$$2x \cdot (y+1) dx + (x^2 - y^2) dy = 0$$

Obecné řešení $h(x, y) = C$

viz $\int(x, y)$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial (-F_2)}{\partial y} = 2x$$

$$dh = (x^2 - y^2) dy + \underbrace{2xy + 2x}_{(2xy + 2x)} dx$$

1) $\frac{\partial h}{\partial x} = 2xy + 2x$

2) $\frac{\partial h}{\partial y} = x^2 - y^2$

z první rovnice

$$h(x, y) = \int 2xy + 2x dx = (y \cdot x^2 + x^2 + k(y))$$

toto zderivuju dle y

a její parciální derivace $\frac{\partial h}{\partial y} = x^2 + \frac{k(y)}{dy}$

$\frac{\partial h}{\partial y}$ dosadím do 2. rovnice:

$$x^2 + \frac{k(y)}{dy} = x^2 - y^2 \quad / dy$$

$$k(y) = -y^2 dy \rightarrow \text{zintegruju} \quad \int -y^2 dy = -\frac{y^3}{3}$$

$$k(y) = -\frac{y^3}{3}$$

$$\rightarrow x^2 y + x^2 - \frac{y^3}{3} = C$$

$$0 + 1 - 0 = C$$

$$C = 1$$

$C \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ dosadím $M[1; 0]$

Fázová

Trajektorie soustavy procházející

bodem M je určena rovnice

$$x^2 y + x^2 - \frac{y^3}{3} = 1$$

M3
3

Body rovnováhy

$$0 = x^2 - y^2$$

$$y^2 = x^2$$

$$0 = -2xy - 2x$$

~~$$0 = x \cdot (-2y - 2)$$~~

$$2xy = -2x \quad | \cdot \frac{1}{2x}$$

$$\underline{\underline{y = -1}}$$

nebo

$$0 = x \cdot (-2y - 2)$$

$$\underline{\underline{0 = x}}$$

$$x=0: x^2 = y^2 \Rightarrow \underline{y=0}$$

1. bod rovnováhy $O = [0; 0]$

$$y = -1: x^2 = y^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{x = \pm 1}}$$

$$P[1; -1]$$

$$Q[-1, -1]$$

~~$$x=1: y^2 = x^2$$~~

~~$$y^2 = 1$$~~

~~$$y = 1$$~~

~~$$\Rightarrow P[1; 1]$$~~

~~$$x=-1: y^2 = x^2$$~~

~~$$y^2 = 1$$~~

~~$$y = 1$$~~

~~$$Q[-1, 1]$$~~

M 15-16

M3

(4)

$$\begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ \dot{x} = 2y(x+2) & \dot{y} = x^2 - y^2 \end{array}$$

a) vložte, že každým bodem fázové ^{roviny} trajektorie prochází právě 1 trajektorie této sou.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x+4 \\ 2x & -2y \end{pmatrix} \text{ je singulární v } E_2$$

u

b) body rovnováhy

$$2y(x+2) = 0$$

$$2y + 4y = 0$$

$$y \cdot (2x+4) = 0$$

$$y = 0$$

$$2xy = -4y \quad | \cdot \frac{1}{2y}$$

$$x = -2$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ x^2 &= y^2 \end{aligned}$$

$$P = [0, 0]$$

$$0 = x^2 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}$$

$$Q = [-2, -2]$$

$$(-2)^2 = y^2$$

$$R = [-2, 2]$$

$$\pm 2 = y$$

M 15-16

143

Určete rovnici fázových trajektorií

Určete tři fázové trajektorie procházející bodem $M = [3, 1]$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{F_2}{F_1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy + 4y} \quad \left| dx \cdot (2xy + 4y)\right.$$

$$(2xy + 4y) \cdot dy = (x^2 - y^2) dx$$

$$(2xy + 4y) dy + (-x^2 + y^2) dx = 0$$

$$1.) \frac{\partial h}{\partial x} = -x^2 + y^2$$

$$2.) \frac{\partial h}{\partial y} = 2xy + 4y$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2xy + 4y$$

h K
K

$$h(x, y) : \int (-x^2 + y^2) dx = -\frac{x^3}{3} + x \cdot y^2 + K(y)$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial y}} = x \cdot 2y + \frac{h(y)}{dy} = 2xy + \frac{K(y)}{dy}$$

Dosaďme do 2.)

$$2xy + \frac{K(y)}{dy} = 2xy + 4y$$

$$K(y) = 4y dy$$

$$\int 4y dy = 4 \frac{y^2}{2} = 2y^2$$

$$\underline{K(y) = 2y^2}$$

$$\text{dosaďme do } h(x, y) = -\frac{x^3}{3} + xy^2 + 2y^2$$

$$\text{Obec. řešení } h(x, y) = C \Rightarrow \boxed{-\frac{x^3}{3} + xy^2 + 2y^2 = C}$$

dosaďme M [3, 1] →

$$-\frac{3^3}{3} + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 4 = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{rcl} -9 + 3 + 2 & = & C \\ -4 & = & C \end{array}$$

M 16-17

13
6

$$\ddot{x} = x^2 + y^3$$

$$\dot{y} = -2x \cdot (y+1)$$

a, 1 fazova trajektorie

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ -2y-2 & -2x \end{pmatrix} \quad \text{spojiti s } E$$

b, body rovnováha

$$0 = x^2 + y^3$$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 \\ -y^3 &= x^2 \\ y^3 &= -x^2 \end{aligned}$$

$$x=0 \Rightarrow y=0$$

$$P[0,0]$$

$$y = x^2 \quad y^3 = (-1) \cdot x^2$$

$$Q[1,-1]$$

$$R[-1,-1]$$

$$0 = -2xy - 2x$$

$$0 = x \cdot (-2y-2)$$

$$x=0$$

$$-2xy = 2x \quad | :2$$

$$y = -1$$

$$y^3 = (-1) \cdot x^2$$

$$\text{pro } y = -1: -1 = (-1) \cdot x^2$$

$$x^2 = -y^3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

M 16-17

C, fázové trajektorie

$$M = [-2, 3]$$

M3

7

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy - 2x}{x^2 + y^3} \quad / \quad dx \cdot (x^2 + y^3)$$

$$(x^2 + y^3) dy = \cancel{(-2xy - 2x)} \cdot dx$$

$$(2xy + 2x) dx + (x^2 + y^3) dy = 0$$

$$dh = (2xy + 2x) dx + (x^2 + y^3) dy$$

$$1.) \quad \frac{dh}{dx} = 2xy + 2x$$

$$2.) \quad \frac{dh}{dy} = x^2 + y^3$$

$$h(x, y) = \int 2xy + 2x \, dx = \int 2xy \, dx + \int 2x \, dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot y + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + h(y) = x^2 y + x^2 + h(y)$$

eliminujme y

$$\frac{dh}{dy} = x^2 + \frac{h(y)}{dy} \quad \Rightarrow \quad \cancel{x^2} + \frac{h(y)}{dy} = \cancel{x^2} + y^3 \quad / \, dy$$

$$h(y) = y^3 dy$$

$$h(y) = \frac{y^4}{4}$$

$$h(x, y) = x^2 y + x^2 + \frac{y^4}{4}$$

$$h(x, y) = C$$

$$x^2 y + x^2 + \frac{y^4}{4} = C$$

[-2, 3]

$$M \rightarrow h(x, y)$$

$$4 \cdot 3 + 4 + \frac{81}{4} = C$$

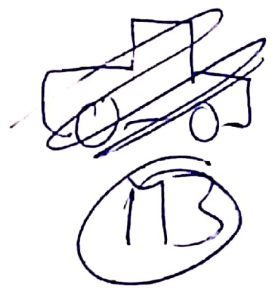
$$\frac{64}{4} + \frac{81}{4} = C$$

$$\frac{145}{4} = C$$

$$11 \cdot 4 = \frac{64}{4} + \frac{81}{4} = \frac{145}{4}$$

$$h(x, y) = x^2 y + x^2 + \frac{y^4}{4} - \frac{145}{4} = 0$$

~~$\dot{x} = 2g \cdot (x+2)$~~



$$\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 0$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 5 \end{cases}$$

#1

ay Fundament. systém

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad D = 1 + 24 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Tab.

$$q(t) = e^{\lambda t}$$

$\lambda_{1,2}$	Fundamentální	obecné
$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$q_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{2t} \quad \quad q_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-3t}$	$x_t = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-3t}$

Max. řešení: zderivovat obecné řešení dle "t"

$$\frac{d x(t)}{d t} = \dot{x} = C_1 \cdot e^{2t} \cdot 2 + C_2 \cdot e^{-3t} \cdot (-3) = 2C_1 \cdot e^{2t} - 3C_2 \cdot e^{-3t}$$

z t dosadím 0

Max. řešení

$$\begin{cases} x_t = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-3t} \\ \dot{x}_t = 2C_1 \cdot e^{2t} - 3C_2 \cdot e^{-3t} \end{cases}$$

$x(t)$

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 5$$

$$0 = C_1 + C_2 \quad | \cdot 2$$

$$0 = -2C_1 - 2C_2$$

$$5 = 2C_1 - 3C_2$$

$$5 = 2C_1 - 3C_2$$

$$5 = -5C_2$$

$$\underline{\underline{-1 = C_2}}$$

$$0 = C_1 - 1$$

$$\underline{\underline{C_1 = 1}}$$

C_1 a C_2 dosadit do obecného řešení

$$\underline{x_t = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-3t}}$$

dosadím C_1 a C_2

$$\underline{x_t = 1 \cdot e^{2t} - e^{-3t}} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -3$$

b) $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 10e^{2t}$ najít obecné řešení rovnice

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow$ shoduje se s exponentem rovnice
pravé strany $\Rightarrow \cdot t$

$$\omega = \alpha + \beta i$$

$$(\alpha = 2)$$

ⓧ

$$x(p) = A \cdot e^{2t} \cdot t$$

$$\dot{x}(p) = A \cdot e^{2t} \cdot 2 \cdot t + A \cdot e^{2t} =$$

$$= A \cdot e^{2t} \cdot (2t+1)$$

$$\ddot{x} = A \cdot e^{2t} \cdot 2 \cdot (2t+1) + A \cdot e^{2t} \cdot 2 =$$

$$= 2 \cdot A \cdot e^{2t} \cdot (2t+1+1) =$$

$$= 2 \cdot A \cdot e^{2t} \cdot (2t+2)$$

Dosadit x do zadání: $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 10e^{2t}$

$\rightarrow$ vypočítám A a B

$\rightarrow$ dosadím do $x(p)$

$$x(t) = \underline{C_1 + e^{2t}} + C_2 \cdot e^{-3t} + x(p) \text{ dosazení}$$

$$\dots = 10e^{2t} \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\dots = e^{-3t} \sin(2t) \Rightarrow \alpha = -3$$

$$(\beta = 2)$$

$$\dots = t^2 + \cos t \Rightarrow A^2 +$$

$$\dots = t^2 \Rightarrow At^2 + Bt + C$$

$$\dots = t \Rightarrow (At + B) \cdot e^t$$

$$\dots = \cos t$$

nebo
sin t

$$= (A \cdot \cos t + B \cdot \sin t) \cdot (t)$$

Pohled
to ujde

$$x_p = A \cdot e^{2t} \cdot t$$

$$\dot{x}_p = A \cdot e^{2t} \cdot (2t+1)$$

$$\ddot{x}_p = 2 \cdot A \cdot e^{2t} \cdot (2t+2)$$

$$\rightarrow \text{dosadit do } \ddot{x} + \dot{x} - 6x = 10e^{2t}$$

$$2Ae^{2t} \cdot (2t+2) + A \cdot e^{2t} \cdot (2t+1) - 6Ae^{2t} \cdot t = 10e^{2t}$$

$$Ae^{2t} \cdot [4t+4 + 2t+1 - 6t] = 10e^{2t} \quad \bigg/ \frac{1}{e^{2t}}$$

$$5A = 10$$

$$\underline{\underline{A = 2}}$$

$$\rightarrow \text{dosadím } A \text{ do } x_p$$

$$x_p = A \cdot e^{2t} \cdot t$$

$$A \rightarrow x_p = 2e^{2t} \cdot t \quad (\text{PARTIČNÍ ŘEŠENÍ})$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ

$$x(t) = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-3t} + 2e^{2t} \cdot t \quad (+p)$$

113

#3

M3
#4

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = t^2$$

a) určiť FS homogennú rce: $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$

b) partikulárni rešení + obecné

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1} \quad \boxed{\lambda_2 = -2}$$

$$\text{F.S.: } \begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\lambda_1 t} & \varphi_2(t) &= e^{\lambda_2 t} \\ \varphi_1(t) &= e^t & \varphi_2(t) &= e^{-2t} \end{aligned}$$

$$\text{Obecné rešení: } x_t = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$\boxed{x_t = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-2t}}$$

$$\begin{aligned} b) \quad x_p &= At^2 + Bt + C \\ \dot{x}_p &= 2At + B \\ \ddot{x}_p &= 2A \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{dosadit do } \ddot{x} + \dot{x} - 2x = t^2 \\ (2A) + (2At + B) - 2[At^2 + Bt + C] = t^2 \\ 2A + 2At + B - 2At^2 - 2Bt - 2C = t^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} t^2: 1 &= -2A \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{2}} \\ t^1: 0 &= 2A - 2B \leftarrow 0 = -1 - 2B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}} \\ t^0: 0 &= 2A + B - 2C \rightarrow 0 = -1 - \frac{1}{2} - 2C \end{aligned}$$

PARCIAĽNÍ
ZLOMKY

$$2C = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{3}{4}}$$

PARTIKULÁRNI
ABC $\rightarrow x_p$:

$$\boxed{x_p = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}}$$

$$\text{OBECNÉ: } x_t = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-2t} + \textcircled{x_p}$$

DOSADIT

M3

#5

$$\ddot{y} + 4y = 4 \cos(2t)$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4$$

$$\lambda^2 = i^2 4$$

$$\lambda = \pm 2i$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2i} \quad \boxed{\lambda_2 = -2i}$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

$$\begin{aligned} \text{F.S.: } q_1(t) &= e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t \\ &= e^{0t} \cdot \cos 2t \end{aligned}$$

$$q_1(t) = \cos 2t$$

$$\begin{aligned} q_2(t) &= e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t \\ &= e^{0t} \cdot \sin 2t \end{aligned}$$

$$q_2(t) = \sin 2t$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ:

$$x_t = C_1 \cdot \cos 2t + C_2 \cdot \sin 2t$$

PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ:

SHODA pravé strany se $(2t)$
a $\lambda = (2i)$

$$x_p = (A \cdot \cos 2t + B \cdot \sin 2t) \cdot t$$

$$\dot{x}_p = [A \cdot (-\sin 2t) \cdot 2 + B \cdot \cos 2t \cdot 2] \cdot t + (A \cdot \cos 2t + B \cdot \sin 2t) \cdot 1$$

$$\dot{x}_p = [-2A \cdot \sin 2t + 2B \cdot \cos 2t] \cdot t + (A \cdot \cos 2t + B \cdot \sin 2t)$$

$$\cos 2t: A \dots$$

$$\sin 2t: B \dots$$

(Handwritten mark)

M3

#6

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = e^{3t}$$

F.S. $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^t$

$$\varphi_2(t) = e^{-2t}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -2$$

Obeć. řešení: $x_t = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-2t}$

PARTIČULÁRNÍ ŘEŠENÍ

$$x_p = A \cdot e^{3t}$$

$$\dot{x}_p = 3A \cdot e^{3t}$$

$$\ddot{x}_p = 9A \cdot e^{3t}$$

$$9A \cdot e^{3t} + 3A \cdot e^{3t} - 2A \cdot e^{3t} = e^{3t}$$

$$A \cdot \cancel{e^{3t}} \cdot \underbrace{[9 + 3 - 2]}_{10} = \cancel{e^{3t}} \cdot 1$$

$$10A = 1$$

$$A = \frac{1}{10}$$

$$\underline{\underline{A = \frac{1}{10}}}$$

$$A \rightarrow x_p = \frac{1}{10} e^{3t}$$

OBEĆ. ŘEŠENÍ $x_t = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-2t} + \frac{1}{10} e^{3t}$

$$e^{2t}$$

$$A \cdot e^{2t}$$

M3

#7

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = \cos t + 3\sin t$$

$$x(0) = 3$$

$$\dot{x}(0) = 3$$

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}}$$

$$F.S.: \varphi_1(t) = e^{2t} \quad \varphi_2(t) = e^t$$

$$obecn\u00e9 r\u00e9.: x_t = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^t \quad t \in \mathbb{R}$$

b.) PARTIKUL\u00c1R

$$\omega = 2 \pm 3i$$

$$1.1. x_p = A \cdot \cos t + B \cdot \sin t$$

$$\dot{x}_p = A \cdot (-\sin t) + B \cdot \cos t$$

$$\ddot{x}_p = A \cdot (-\cos t) + B \cdot (-\sin t)$$

2.2.

$$x_{p2} = A \cdot \cos t + B \sin t$$

$$\text{---} \quad (\quad) \quad \text{---}$$

$$\text{---} \quad (\quad) \quad \text{---}$$

$$A \cdot (-\cos t) + B \cdot (-\sin t) + 3A \cdot (-\sin t) + 3B \cdot \cos t + 2A \cdot \cos t + 2B \cdot \sin t = \cos t + 3\sin t$$

$$-A \cdot \cos t - B \sin t - 3A \sin t + 3B \cos t + 2A \cos t + 2B \sin t = \cos t + 3\sin t$$

$$\sin t: 3 = -B - 3A + 2B$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} X$$



1. u. c. $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -6 \\ -3 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = -5$$

$$\begin{pmatrix} 1-4 & -6 \\ -3 & -2-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(λ_1)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -3 & -6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erwähle $\boxed{x_1 = -1}$

$$-3 - 6x_2 = 0$$

$$\boxed{x_2 = -\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

relativer vektor $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

~~$$X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$~~

(λ_2) = -5

$$\begin{pmatrix} 1+5 & -6 \\ -3 & -2+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 1$$

$$6 - 6x_2 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Ober. vektor =

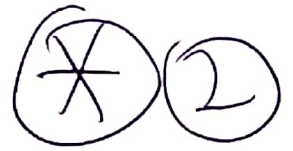
$$X(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot x_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot x_2 =$$

$$= c_1 \cdot e^{4t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



M3

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} X$$



a, Fund. system, spec. reiten

$$\det |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 \quad \lambda_1 = +2i \\ \lambda_2 = -2i$$

Wegen 1 v.l. $\vec{c}_1$, na 2. zapomen

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -1-2i & -1 \\ 5 & 1-2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_1=1} \text{ - zvolim}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -1-2i - x_2 &= 0 \\ -1-2i &= x_2 \end{aligned}$$

Eulerova formule $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$



$$\text{MAX. RES.} = \vec{x}_{\text{max}} = C_1 + C_2 = \{$$

Matematika

Fakulta strojní, ČVUT v Praze
Přijímací zkoušky do navazujícího magisterského studia (2012)
Aplikovaná matematika, verze B

1. [10 bodů] Je dána funkce $f(x) = \ln(3x+1) - x^2$.
- Vypočítejte derivaci této funkce. Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 0$.
 - Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně 2 o středu $x_0 = 0$ zadané funkce f . Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 1/3$ (ve tvaru zlomku v základním tvaru).
 - Vypočítejte derivaci třetího řádu dané funkce. Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Pomocí $R_3(1/3)$ odhadnete velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(1/3)$ z úlohy b). Výsledek uveďte ve tvaru zlomku v základním tvaru.

Řešení: a) $f'(x) = \frac{3}{3x+1} - 2x$, tečna: $y = 3x$.

b) $T_2(x) = 3x - \frac{11}{2}x^2$, $f(1/3) = 7/18$.

c) $f'''(x) = \frac{54}{(3x+1)^3}$, $R_3(x) = \frac{9}{(3x+1)^3}x^3$, ξ leží mezi x_0 a x , $|R_3(1/3)| \leq 1/3$.

2. [10 bodů]
- Načrtnete kladně orientovanou křivku $C = \{[x, y] \in E_2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$.
- Napište tvrzení Greenovy věty. Pomocí tohoto vztahu vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (3x - y, x)$ po dané orientované křivce C (tj. křivkový integrál $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$).
 - Tento křivkový integrál vypočítejte přímým výpočtem, tj. pomocí parametrizace dané křivky C .

Řešení: a) Cirkulace $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int \int_{\text{int} C} 2 dx dy = 4\pi$

b) Parametrizace: $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in (0, 2\pi)$. Cirkulace $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (2 - 3 \sin t \cos t) dt = 4\pi$.

3. [10 bodů] Je dána lineární soustava $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} X$.
- Vypočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matice A této soustavy (pro kontrolu: vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2i$).
 - Určete fundamentální systém řešení a napište obecné řešení dané soustavy.
 - Určete bod rovnováhy a jeho typ. Popište (slovně) tvar fázových trajektorií.

Řešení: a) Vlastní čísla: $\lambda_{1,2} = \pm 3i$, pro λ_1 jsou vlastní vektory $X_1 = t(-2, 1 + 3i)^T$, $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$.

b) Fundamentální systém: $\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \cos 3t \\ \cos 3t - 3 \sin 3t \end{pmatrix}$, $\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin 3t \\ 3 \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}$

Obecné řešení: $X(t) = C_1 \Phi_1(t) + C_2 \Phi_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

- c) Bod rovnováhy je $[0, 0]$, je to jediné řešení soustavy $AX = 0$. Je typu střed. Fázové trajektorie jsou uzavřené křivky (elipsy) se středem v bodě rovnováhy.

Aplikovaná matematika, výsledky

① Daný interval je uzavřený a omezený. Daná funkce je v něm spojitá, neboť $I \subset D(f) = \langle -\frac{3}{2}, \infty \rangle$. Tím je zaručena existence největší i nejmenší hodnoty dané funkce v daném intervalu.

Ve všech vnitřních bodech daného intervalu má funkce f derivaci $f'(x) = \sqrt{2x+3} + \frac{x}{\sqrt{2x+3}}$.

Rovnice $f'(x) = 0$ má jediný kořen $x = -1$. Spolu s krajními body intervalu I tak máme pouze tři body, ve kterých daná funkce může nabývat absolutních extrémů. Tyto pak určíme z funkčních hodnot v uvedených bodech.

Závěr: V daném intervalu je $\max f = f(1) = \sqrt{5}$, $\min f = f(-1) = -1$.

② a) Derivace $f'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{2}$, $f''(x) = \frac{-4}{(2x+1)^2}$, tečna: $y = \frac{3}{2}x$, b) $T_2(x) = \frac{3}{2}x - 2x^2$,

$f(1/2) \doteq T_2(1/2) = 1/4$, $f'''(x) = \frac{16}{(2x+1)^3}$, $R_3(x) = \frac{8}{3(2\xi+1)^3}x^3$, ξ leží mezi $x_0 = 0$ a x ,
 $|R_3(1/2)| = |f(1/2) - T_2(1/2)| \leq 1/3$.

3. a) $\det(A - \lambda E) = (-2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 10)$, vlastní číslo $\lambda_1 = -2$, dvě komplexní vlastní čísla: $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3i$, $\rho(A) = \sqrt{10}$; pro λ_1 jsou vlastní vektory $X = p(0, 0, 1)^T$, $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$.

4. a) a b) viz [2], řešený příklad 557: Při parametrizaci $z = 4 - x^2 - y^2$, kde $[x, y] \in B : x^2 + y^2 \leq 4$ je kolmý vektor $\vec{n} = (2x, 2y, 1)$. Hledaný tok, tj. plošný integrál $\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p}$ je pak dán hodnotou dvojného integrálu

$\iint_B (y, -x, z) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy = \iint_B (4 - x^2 - y^2) dx dy$. Ten vypočteme pomocí polárních souřadnic s výsledkem 8π . Poznámka: Celý výpočet lze případně provést parametrizací dané plochy pomocí cylindrických souřadnic.

c) K výpočtu lze užít Gaussovu větu, jejíž předpoklady jsou splněny. Potom hledaný tok, tj. plošný integrál $\iint_\sigma \vec{f} \cdot d\vec{p}$ je roven trojnému integrálu $\iiint_M dx dy dz$, neboť $\text{div } \vec{f} = 1$. Výsledek 8π může být získán též bez Gaussovy věty, tj. výpočtem integrálu $\iint_\sigma \vec{f} \cdot d\vec{p}$ jako součtu $\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} + \iint_P \vec{f} \cdot d\vec{p} = 8\pi + 0 = 8\pi$, kde plocha $P : x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$, tj. kruh v rovině $z = 0$.

5. viz [3], řešený příklad 2.14: a) Fundamentální systém tvoří funkce $\varphi_1(t) = e^{2t} \cos t$, $\varphi_2(t) = e^{2t} \sin t$. Obecné řešení homogenní rovnice je $x_h(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. b) Odhad partikulárního řešení je $x_p = Ae^{2t} + B \cos t + C \sin t$. Partikulární řešení je potom $x_p(t) = e^{2t} + \frac{1}{8} \cos t - \frac{1}{8} \sin t$. c) Obecné řešení $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

6. viz [3], řešený příklad 4.5: a) Jacobiova matice je spojitá v $\mathbb{E}_2$.

b) $x^2(y+1) - \frac{y^3}{3} = C$, $C \in \mathbb{R}$, $x^2(y+1) - \frac{y^3}{3} = 1$, c) $[0, 0]$, $[1, -1]$, $[-1, -1]$.

Aplikovaná matematika

① Zdůvodněte existenci a nalezněte absolutní extrémy funkce $f : f(x) = x\sqrt{2x+3}$ v intervalu $I = \langle -\frac{3}{2}, 1 \rangle$ (tj. stanovte polohu extrémů, jejich typ a hodnotu).

✓ 2 Je dána funkce $f(x) = \ln(2x+1) - \frac{x}{2}$.

- Vypočítejte 1. a 2. derivaci této funkce. Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 0$.
- Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně 2 o středu $x_0 = 0$ zadané funkce f . Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 1/2$.
- Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Pomocí $R_3(1/2)$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(1/2)$ z úlohy b).

3 a) Určete vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 0 \\ -13, & -1, & 0 \\ 4, & -8, & -2 \end{pmatrix}$.

b) Určete spektrální poloměr $\rho(A)$, tj. největší z absolutních hodnot vlastních čísel matice A .

c) Zvolte jedno z vlastních čísel. Napište soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů a ty pak určete.

4. a) Načrtněte plochu $Q = \{[x, y, z] \in E_3; z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$. Navrhněte její parametrizaci a napište vektor kolmý k ploše Q při této parametrizaci.

b) Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (y, -x, z)$ plochou Q orientovanou normálovým vektorem, který svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.

c) Vypočítejte tok tohoto vektorového pole $\vec{f}$ plochou σ , která je vně orientovaným povrchem tělesa $M = \{[x, y, z] \in E_3; 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$. (K výpočtu lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu).

5. a) Určete fundamentální systém a napište obecné řešení homogenní diferenciální rovnice 2. řádu $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$.

b) Užitím metody odhadu napište tvar partikulárního řešení nehomogenní rovnice $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = e^{2t} + \cos t$. Partikulární řešení určete.

c) Napište obecné řešení nehomogenní rovnice z úlohy b).

6. Je dána autonomní soustava $\dot{x} = x^2 - y^2, \dot{y} = -2x(y+1)$.

a) Ukažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie této soustavy.

b) Určete implicitní tvar fázových trajektorií dané soustavy. Napište rovnici fázové trajektorie, která prochází bodem $M = [1, 0]$.

c) Určete všechny body rovnováhy zadané soustavy.

Další podobné úlohy lze nalézt např. v následujících textech:

[1] S. Kračmar, F. Mráz, J. Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum. Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2013.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová: Sbírka řešených příkladů z Matematiky II. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.

[3] S. Čipera: Řešené příklady z Matematiky III. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2008.

Fakulta strojní, ČVUT v Praze

Přijímací zkoušky do navazujícího magisterského studia (2015)

Aplikovaná matematika

1. [10 bodů] Je dána funkce $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-1} - x$.
- a) Určete definiční obor $D(f)$. Napíšte rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 5$. Užitím rovnice tečny určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 11/2$ (ve tvaru zlomku).
- b) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů zadané funkce na intervalu $I = \langle 1, 6 \rangle$. Určete tyto absolutní extrémy (tj. stanovte polohu extrémů, jejich typ a hodnotu).

Řešení: a) $D(f) = (1, \infty)$, tečna: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $f(11/2) \doteq -5/4$.

b) Zadaná fce je spojitá na daném intervalu, který je omezený a uzavřený.
 $\max f = f(2) = 0$, $\min f = f(6) = 2 \cdot \sqrt{5} - 6$.

2. [10 bodů] a) Určete vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- b) Zvolte jedno z vlastních čísel a napíšte odpovídající soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. Vlastní vektory pak určete.

Řešení: a) Vlastní čísla: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 4 \pm 2i$.

b) Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ jsou vlastní vektory $u = (9t, -5t, 8t)^T$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

3. [10 bodů] Je dána autonomní soustava nelineárních diferenciálních rovnic:
 $\dot{x} = 2y(x+2)$, $\dot{y} = x^2 - y^2$.

- a) Ukažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie této soustavy.
- b) Určete body rovnováhy dané soustavy.
- c) Určete rovnici fázových trajektorií.
 Určete rovnici fázové trajektorie, která prochází bodem $M = [3, 1]$.

Řešení: a) Jacobiova matice $J(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2(x+2) \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$ je spojitá v E_2 .

b) Body rovnováhy: $[0, 0]$, $[-2, 2]$, $[-2, -2]$.

c) Rovnice fázových trajektorií: $y^2x + 2y^2 - \frac{x^3}{3} + C = 0$

Rovnice fázové trajektorie, která prochází daným bodem: $y^2x + 2y^2 - \frac{x^3}{3} + 4 = 0$

- 1.1. Informace o písemných přijímacích zkouškách: úplné zadání zkušebních otázek či příkladů, které jsou součástí přijímací zkoušky nebo její části, a u otázek s výběrem odpovědi, resp. správné řešení:

Aplikovaná matematika

Fakulta strojní, ČVUT v Praze
Přijímací zkoušky do navazujícího magisterského studia (2016)
Aplikovaná matematika

1. [10 bodů] Je dána funkce $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$.

- a) Určete definiční obor $D(f)$. Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 4$. Pomocí rovnice tečny určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 9/2$ (ve tvaru zlomku).
b) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů dané funkce f na intervalu $(0, 4)$ a absolutní extrémy určete (tj. určete jejich polohu a hodnotu).

Řešení: a) $D(f) = (0, \infty)$, tečna: $y = \frac{3}{2}x - 10$, $f(9/2) \doteq -13/4$.

b) Zadaná fee je spojitá na daném intervalu, který je omezený a uzavřený.
 $\max f = f(0) = 0$, $\min f = f(2) = -4 \cdot \sqrt{2}$.

2. [10 bodů] Je dána nehomogenní diferenciální rovnice $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 5e^{-2t}$. (N)

- a) Určete fundamentální systém řešení a napište obecné řešení příslušné homogenní rovnice $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$.
b) Užitím metody odhadu navrhněte tvar partikulárního řešení dané nehomogenní rovnice (N). Partikulární řešení určete. Napište obecné řešení rovnice (N).
c) Určete maximální řešení rovnice (N) pro počáteční podmínky $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = -15$ (Cauchyova úloha).

Řešení: a) Fundamentální systém: $\{\varphi_1(t) = e^{-2t}, \varphi_2(t) = e^{-t}\}$.

Obecné řešení homogenní rovnice: $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

b) Partikulární řešení: Tvar: $x_p(t) = A e^{-2t}$, $x_p(t) = -5t e^{-2t}$.

Obecné řešení nehomogenní rovnice: $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} - 5t e^{-2t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

c) Řešení Cauchyovy úlohy: $x(t) = 5e^{-2t} - 5t e^{-2t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

3. [10 bodů] Je dána autonomní soustava nelineárních diferenciálních rovnic:

$$\dot{x} = x^2 + y^3, \quad \dot{y} = -2x(y+1).$$

- a) Ukazte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie této soustavy.
b) Určete body rovnováhy dané soustavy.
c) Určete rovnici fázových trajektorií.
Speciálně určete rovnici fázové trajektorie, která prochází bodem $M = [-2, 3]$.

Řešení: a) Jacobiova matice $J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ -2(y+1) & -2x \end{pmatrix}$ je spojitá v E_2 .

b) Body rovnováhy: $[0, 0]$, $[1, -1]$, $[-1, -1]$.

c) Rovnice fázových trajektorií: $x^2(y+1) + \frac{y^4}{4} + C = 0$

Rovnice fázové trajektorie, která prochází daným bodem: $x^2(y+1) + \frac{y^4}{4} = \frac{145}{4}$

Matematika

Fakulta strojní, ČVUT v Praze

Přijímací zkoušky do navazujícího magisterského studia (2013)

Applikovaná matematika

1. [10 bodů] Je dána funkce $f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2$.

- a) Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 0$.
 b) Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně 2 o středu $x_0 = 0$ zadané funkce f . Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 1/3$ (ve tvaru zlomku).
 c) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$.
 Pomocí $R_3(1/3)$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(1/3)$ z úlohy b). Výsledek uveďte ve tvaru zlomku.

Řešení: a) tečna: $y = x$.

b) $T_2(x) = x - x^2$, $f(1/3) \doteq \frac{2}{9}$.

c) $R_3(x) = \frac{1}{3(\xi+1)^3}x^3$, ξ leží mezi x_0 a x , $|R_3(1/3)| \leq 1/81$.

2. [10 bodů]

- a) Je dána homogenní diferenciální rovnice $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 0$.
 Určete fundamentální systém řešení a napište obecné řešení této rovnice.
 Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro počáteční podmínky $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 5$.
 b) Užitím metody odhadu určete partikulární řešení nehomogenní rovnice $\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 10e^{2t}$. Napište obecné řešení této rovnice.

Řešení: a) Fundamentální systém: $\{\varphi_1(t) = e^{2t}, \varphi_2(t) = e^{-3t}\}$.Obecné řešení: $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$ Řešení Cauchyovy úlohy: $x(t) = e^{2t} - e^{-3t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$ b) Partikulární řešení: $x_p(t) = 2te^{2t}$.Obecné řešení: $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} + 2te^{2t}$, $t \in (-\infty, +\infty)$

3. [10 bodů]

- a) Načrtněte plochu
- Q
- (část paraboloidu):

$$Q = \{[x, y, z] \in E_3; z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}.$$

Navrhněte parametrizaci a napište vektor kolmý k ploše Q .Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{f} = (x, y, 0)$ plochou Q orientovanou normálovým vektorem, který svírá s kladným směrem osy z ostrý úhel, tj. vypočítejte plošný integrál $\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p}$.

- b) Vypočítejte tok tohoto vektorového pole
- $\vec{f}$
- plochou
- σ
- , která je vně orientovaným povrchem tělesa
- $M = \{[x, y, z] \in E_3; 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$
- . K výpočtu lze použít Gaussovu–Ostrogradského větu.

Řešení: a) Vyjádření plochy: $z = 4 - x^2 - y^2$, $[x, y] \in B$, kde $B = \{[x, y] : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Tok = $\int \int_B (2x^2 + 2y^2) dx dy = 16\pi$.

b) Tok = $\int \int \int_M \operatorname{div} \vec{f} dx dy dz = \int \int \int_M 2 dx dy dz = 16\pi$.

1. [10 bodů] Je dána funkce $f(x) = e^{3x-6} - x$.
- Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 2$.
 - Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně 2 o středu $x_0 = 2$ zadané funkce f . Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 5/3$ (ve tvaru zlomku).
 - Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$.
Pomocí $R_3(5/3)$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(5/3)$ z úlohy b). Výsledek uveďte ve tvaru zlomku.

Řešení: a) tečna: $y = 2x - 5$.

$$b) T_2(x) = -1 + 2(x-2) + \frac{9}{2}(x-2)^2, f(5/3) \doteq -\frac{7}{6}.$$

$$c) R_3(x) = \frac{9}{2} e^{3x-6} (x-2)^3, \quad \xi \text{ leží mezi } x_0 \text{ a } x, \quad |R_3(5/3)| \leq 1/6.$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{9^2}{4} = 16$$

$$\frac{16}{2} = 8$$

2. [10 bodů]

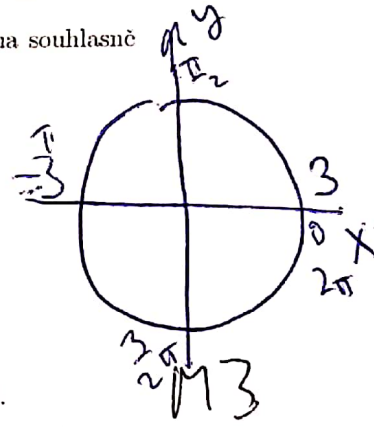
Načrtněte křivku $C = \{[x, y] \in E_2; x^2 + y^2 = 9\}$. Vyznačte na ní kladnou orientaci.

- Napište tvrzení **Greenovy věty**.
Pomocí tohoto vztahu vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (x - 2y, x)$ po dané orientované křivce C (tj. křivkový integrál $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$).
- Tento křivkový integrál vypočítejte přímým výpočtem, tj. pomocí parametrizace dané křivky C .

$$\text{Řešení: a) Pro } \vec{f} = (U, V) \text{ je } \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{IntC} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{IntC} 3 dx dy = 27\pi.$$

- Při parametrizaci $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je daná křivka orientována souhlasně s touto parametrizací.

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} (3 \cos t - 6 \sin t, 3 \cos t) \cdot (-3 \sin t, 3 \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-9 \sin t \cos t + 18 \sin^2 t + 9 \cos^2 t) dt = 27\pi. \end{aligned}$$



3. [10 bodů]

- Je dána homogenní diferenciální rovnice $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$.
Určete fundamentální systém řešení a napište obecné řešení této rovnice.
Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro počáteční podmínky $x(0) = 6, \dot{x}(0) = 0$.
- Užitím metody odhadu určete partikulární řešení nehomogenní rovnice $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 15e^{-3t}$. Napište obecné řešení této rovnice.

Řešení: a) Fundamentální systém: $\{\varphi_1(t) = e^t, \varphi_2(t) = e^{-3t}\}$.

Obecné řešení homogenní rovnice: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}, t \in (-\infty, +\infty)$.

Řešení Cauchyovy úlohy: $x(t) = \frac{9}{2} e^t + \frac{3}{2} e^{-3t}, t \in (-\infty, +\infty)$.

b) Partikulární řešení: $x_p(t) = -\frac{15}{4} t e^{-3t}$.

Obecné řešení nehomogenní rovnice: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t} - \frac{15}{4} t e^{-3t}, t \in (-\infty, +\infty)$.